

/ /

مقالہ

18151

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

131

الراسع بينهما عند أي نقطة من هذا المثلث المثلثي يكون للثلاثة

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \quad ; z \neq 0$$

لنفس الحاملات

$$* \quad b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{\frac{z^2-1}{z^2}}{z^0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{z^2-1}{z^2} dz$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{h(z)}{(z-a)^2} dz = \frac{h'(a)}{1!}$$

$$= \frac{(e^z - 1)'}{11} \Big|_{z=0} = e^z \Big|_{z=0} = 1$$

$$* \quad b_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{\frac{z^2-1}{z^2}}{\frac{z-1}{z^{-1}}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{z^2-1}{z} dz = e^{z-1} \Big|_{C_2} = 0$$

$$\star \quad b_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{e^z - 1}{z^2} dz, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} (e^z - 1) dz = 0$$

لنوعان كامل، والى تحليليه،

$$\star b_4 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{z^3 - 1}{z^3} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} z(z^2 - 1) dz = 0$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

معراج  $a = b_6 = b_5 = b_4$



Subject :

$$* a_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z - 1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z - 1}{z^2} dz$$

حسب مبرهن كوكوشي للمعتمدة :

$$\frac{(e^z - 1)''}{2!} \Big|_{z=0} = \frac{e^z}{2} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2}$$

$$* a_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z - 1}{z^2} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z - 1}{z^3} dz = \frac{(e^z - 1)'''}{3!} = \frac{1}{3!}$$

$$* a_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z - 1}{z^3} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z - 1}{z^5} dz = \frac{(e^z - 1)^{(4)}}{4!} = \frac{1}{4!}$$

عندئذ يكون

$$f(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} z + \frac{1}{4!} z^2 + \frac{1}{5!} z^3 + \dots + \frac{1}{(n+2)!} z^n + \dots + \frac{1}{z} = b_1$$

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n, \quad 0 < |z|$$

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$$

« طريقة ثانية للـ »

حسب تدرجات كوكوشي المتوالية :

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!} z + \frac{1}{2!} z^2 + \dots + \frac{1}{n!} z^n + \dots$$

$$e^z - 1 = z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \dots + \frac{1}{n!} z^n + \dots \quad (1 \leq |z| < \infty)$$

حسب تدرجات ونسبتي التقطع المتوالية :

$$\frac{1}{z^2} (e^z - 1) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} z + \dots + \frac{1}{n!} z^{n-2} + \dots$$

(0 < |z| < \infty)

مثال :

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

أوجد تدرجات الدالة

حيث  $0 < |z|$

الحل :



Subject :

$0 < |z|$

مركز النشر  $(z_0 = 0)$  أي مركز النشر بالنسبة لمنطقة  $C_1$  نصف مقصراً  $r_2$  محيط بشكل كافٍ بحيث  $0 < r_2 < r_1$  كما في  $(z_0 = 0)$  بالحد  $C_1$  نصف مقصراً  $r_1$  نصف مقصراً غير بشكل كافٍ بحيث أن  $(r_1 < r_2 < r_1)$  عندئذ يكون للدالة  $f$  التمثيل الآتي :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \quad , \quad 0 < |z| < \infty$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z^{-n+1}} dz \quad , \quad n=1, 2, \dots$$

$$* \quad b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{\sin z}{z} dz = [\sin z]_{z=0} = 0$$

$$* \quad b_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{\frac{\sin z}{z}}{\frac{1}{z}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \sin z dz = 0$$

$$b_2 = b_3 = b_4 = \dots = b_n = 0 \quad \text{نستنتج أن}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{\sin z}{z^{n+1}} dz \quad \text{نحسب } a_n \text{ من خلال}$$

**طريقة ثانية لحل**

$$\sin z = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \frac{1}{7!} z^7 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^{n+1}}{(2n+1)!} \quad (|z| < \infty)$$

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{1}{3!} z^2 + \frac{1}{5!} z^4 - \frac{1}{7!} z^6 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{(2n+1)!}$$

$(0 < |z| < \infty)$

**نصف التواضع الآتية للتسلسلات :**

أولاً : لنفرض لدينا التسلسلة  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  حيث  $(1) \quad z_n = x_n + i y_n$  ولنفرض

أن  $z$  متقاربة، عندئذ يكون :

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right) \quad \text{و} \quad \left( \sum_{n=0}^{\infty} y_n \right) \quad \text{كل منهما متسلسلة متقاربة، استناداً}$$

إلى مبرهنات من فائدة سابقة.



ونظم بأن الشرط اللزم لتقارب سلسلة أعداد حقيقية هو أن يسير إلى الصفر  
أي أن :

$$x_n = 0 \quad \text{و} \quad y_n = 0 \quad \text{عند} \quad n \rightarrow \infty$$

من هذا يكون  $z_n = x_n + iy_n$  شرط بأن الشرط اللزم لتقارب السلسلة (1)

هو  $y_n = 0$  وهذا يعني بالضرورة (2) أنه صاعد كل  $(n < \infty)$  يوجد

عدد صحيح  $(N_1)$  حيث أن  $[|z_n - 0| < \epsilon]$  طالما أن  $n < N_1$

وهذا يعني أن السلسلة المتقاربة هي محدودة أي أنه يوجد

$$M \text{ حيث أن } |z_n| < M$$

المقارب بالاطلاق :

نقول عن السلسلة  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  ان السلسلة متقاربة بالاطلاق اذا وفقط اذا

كانت السلسلة  $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$  ، ولكن نظم ان  $|Re z_n| \leq |z_n|$

أي ان  $|Im z_n| \leq |z_n|$

$$|x_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \quad \text{و} \quad |y_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

وعند اختيار المقارنة يكون  $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$  و  $\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|$  سلسلتين متقاربتين

ما يعني ان  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  و  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  سلسلتين متقاربتين بالاطلاق

وهذا يعني بدوره ان السلسلة  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  هي سلسلة متقاربة

أو خلاص الى النتيجة الآتية :

كل سلسلة متقاربة بالاطلاق في الساحة المقيدة هي أيضاً سلسلة متقاربة

مبرهنة :

إذا كانت السلسلة  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  متقاربة عند  $(z_1 \neq 0)$  عندئذ تكون هذه

السلسلة متقاربة عند كل نقطة  $z$  حيث  $|z| < |z_1|$  أي النظام الذي

يقع في داخلية التي مركزها  $z$  وتر من  $z$  .

البرهان :

بما ان السلسلة متقاربة عند  $z_1$  هذا يعني ان السلسلة العددية

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n \text{ متقاربة}$$



Subject :

وهذا يعني بدره أن هذه المسلسلة محدودة ، أي يوجد  $M$  حيث أن :

$$|a_n z^n| < M$$

من أجل  $|z| < |z_1| \leftarrow \frac{|z|}{|z_1|} < 1$  لنضع  $\frac{|z|}{|z_1|} = k$  عندئذ يكون  $(k < 1)$

$$|a_n z^n| = |a_n z_1^n \frac{z^n}{z_1^n}| = |a_n z_1^n| \cdot \left(\frac{|z|}{|z_1|}\right)^n < M k^n$$

وعند اختيار المقارن تكون المسلسلة  $\sum_{n=0}^{\infty} M k^n$  هي مسلسلة هندسية متقاربة لأن  $(k < 1)$  عندئذ تكون المسلسلة  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$  متقاربة أي أن  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  هي مسلسلة متقاربة بالانكسار ونعلم بأن كل مسلسلة متقاربة بالانكسار هي مسلسلة متقاربة.

### ملحظة :

المبرهنة السابقة تنص بأن مسلسلة القوى المذكورة في نص المبرهنة هي مسلسلة متقاربة عند كل نقطة  $z$  تحققت المتراجحة «  $|z| < |z_1|$  » وهذا يعني بدره أن المقاربة في داخلية الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها يساوي  $|z_1|$

### ملحظة :

أكبر دائرة مركزها نقطة الأصل تكون مسلسلة القوى المذكورة في نص المبرهنة « متقاربة عند كل نقطة من نقاط داخليتها ندعوها دائرة المقارب وخارج دائرة المقارب تكون مسلسلة القوى متباعدة .

### الاستنتاجات :

لنفرض أن  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  متقاربة ودائرة المقارب لـ  $|z| = r$

لنفرض أن  $z_1$  نقطة من خارجية الدائرة ،  $|z_1| = r_1$  « دائرة التقارب »

حيث أن  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$  تكون متقاربة عندها النقطة .

عندئذ استناداً إلى المبرهنة السابقة تكون  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  متقاربة عند كل نقطة  $z$

تحقق  $|z| < |z_1|$  وهذا يعني المفروض بأن دائرة التقارب هي  $|z| = r_1$

Subject :

/ /

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

إذا المخرج، الجولي جايوت وبالنسبة إلى المسألة  
مضاعفة عند  $z_1$  ومنه لا ينبغي أن  
 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  مضاعفة عند كل نقطة تقع في خارج دائرة التقارب